

ELASTO - PLASTİK SİSTEMLERİN GELİŞİGÜZEL TİTREŞİMİ

Helvacı, İ. (*), Gürpınar, A. (**)

Ö Z E T :

Bu yazıda bir dereceli elasto - plastik sistemlerin depreme benzer uyarıcıların etkisiyle gelişigüzel titreşimi incelenmiştir. Sistemin olasılık yasası ve buna bağlı olarak bazı tepki - olasılık değerleri elde edilmiş, ilgili sonuçlar grafikler halinde verilmiştir.

SYNOPSIS :

In this paper, random vibration of elasto - plastic systems with one - degree of freedom excited by earthquake - like excitations are studied. Probability law for the system, and depending on that, some response statistics are obtained. Results are given in graphical form.

1. G İ R İ Ş :

Yer hareketinin gelişigüzel karakteri, depreme sarsılan bir yapının tepki analizinde olasılık teorisinin kullanılmasını gerektirir. Öte yandan, ekonomik nedenler yapının elastik sınır ötesindeki davranışı ile ilgili çalışmalarını yoğunlaştırmıştır. Sistemin elastik sınırı aştıktan sonraki davranışının rastgele oluşunun yanısıra doğrusal olmayışı, tepki analizine ancak bazı sınırlayıcı varsayımlarla olanak vermektedir.

Problem, gerçekte, hem uyarıcının (depremin) özellikleri, hem de sistemin tepkisi bakımından çok yönlülük göstermektedir. Öncelikle uyarıcının bütün olasılık özellikleri bilinmekte midir? Konu yer hareketi ise, bu sorunun cevabı olumsuz olacaktır. Bu konuda bilinen ve çok sayıda deprem kayıtlarının incelenmesinden anlaşılan, yer hareketinin kararlı olmadığıdır. (nonstationary process). Kararlı olmayan gelişigüzel bir uyarıcıyla sarsılan bir yapının tepkisinin, elastik sınırlar içinde bile olsa, gene kararlı olmayan bir ge-

(*) İnş. Yük. Müh.

(**) Yardımcı Prof. Dr.; O.D.T.Ü. Müh. Bil. Bölümü.

lişigüzel oluşum (nonstationary random process) olması beklenir. Literatürde, doğrusal sistemlerin kararlı davranışı konusunda oldukça geniş çalışmalar yapılmıştır (4, 8, 11, 13, 15, 16). Bazı yazarlar, doğrusal sistemlerin kararsız davranışlarını tartışmışlardır (2, 3, 11). Sistem davranışı, doğrusal olmamakla birlikte kararsızlık gösteriyorsa, yukarıda da söz edildiği gibi, tepki oluşumu ancak bazı yaklaşımlarla «tahmin» edilebilmektedir.

Bu amaçla, doğrusal analiz yöntemleri, doğrusal olmayan problemlere uygulanmış ve perturbasyon (9) ve eşdeğer - doğrusal (equivalent - linear) (5, 7, 12) gibi bazı yaklaşık teknikler geliştirilmiştir. Ancak, bu yaklaşık metodlar doğrusallıktan sapmanın büyük olması şartıyla sınırlıdır.

Doğrusal olmayan bir «yay» sistemin hareket denklemi

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + F(x) = f(t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ile ifade edilebilir. Burada x, yer değiştirmeyi; t, zamanı; β , birim kütle için viskoz sönüm katsayısını; f (t), birim kütle için, zamana bağlı olarak yüklemeyi verirler. Denklemi doğrusallıktan saptıran F (x) ise yer değiştirmeye bağlı yay kuvvetini verir. Eğer dinamik sistemi faz uzayında (phase - space) bir nokta olarak düşünürsek, sistemin bu uzaydaki yörüngesi sürekli Markov oluşumu (continuous Markov process) olarak tanımlanabilir. Böyle bir oluşum için olasılık yasası (probability law) Fokker - Planck denkleminin çözümü ile elde edilebilir ki, adı geçen denklem

$$\frac{\delta P_c}{\delta t} = -\sum \frac{\delta}{\delta y_i} (a_i P_c) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\delta^2}{\delta y_i \delta y_j} (b_{ij} P_c) \quad 2$$

ile belirlenir.

Burada

$P_c = P_c(\bar{y}, t/\bar{x})$ geçiş olasılığı ve

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E(\Delta y_i)}{\Delta t} \quad b_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta \bar{y}_i \Delta \bar{y}_j]}{\Delta t} \quad .(3) \text{ dir.}$$

Denklem (3) de verilen E [.], [.] için ortalama değeri, y_i de faz uzayındaki durum vektörünü tanımlarlar. Denklem (2) Uhlenbuck (17) ve Caughey (6) tarafından tartışılmıştır.

Caughey (6), hareketi, denklem (1) tarafından tanımlanabilen bir dereceli, doğrusal olmayan sistemler için geçiş olasılığını (transition probability) veren genel bir çözümü, bazı varsayımlarla elde etmiştir. Uyarıcının olasılık özelliklerine ilişkin bu varsayımlar şöyle özetlenebilir :

1 — Uyarıcı kararlıdır (stationary) ve normal dağılım (Gaussian distribution) izler,

2 — Uyarıcı «beyaz gürültü (white noise)» güç spektrumuna (power spectrum) sahiptir.

3 — Uyarıcının ortalama değeri sıfırdır.

Bu kabuller,

$$E [f(t_1) \cdot f(t_2)] = (W_0/2) \delta(t_1 - t_2) \quad \dots\dots\dots (4a)$$

$$E [f(t)] = 0 \quad \dots\dots\dots (4b)$$

şeklinde ifade edilirler. Burada W_0 uyarıcının sabit güç spektrum değerini (cm/sn²)/(devir/sn) cinsinden; $\delta(.)$ de Dirac Delta Fonksiyonunu; t_2 ve t_1 de değişik zamanları tanımlamaktadırlar.

Caughey (6), yer değiştirme için $y_1=x$, hız için de $y_2=\dot{x}$ diyerek; anılan özelliklere sahip uyarıcının etkisindeki genel doğrusal olmayan (non-linear) bir sistem için geçiş olasılığını

$$P(y_1, y_2) = C \cdot \exp \left\{ - \frac{4\beta}{W_0} \left[\frac{y_2^2}{2} + \int_0^{y_1} F(u) du \right] \right\} \quad (5)$$

olarak elde etmiştir. Burada C normalleştirme katsayısıdır.

2. ELASTO - PLASTİK SİSTEME UYGULAMA :

Denklem (5) ile verilen genel eşitliğin, özel sistemlere uygulanabilmesi, denklemde integral içinde bulunan kuvvet-yerdeğiştirme ilişkisinin bu özel sistem için yazılabilmesine bağlıdır. Şekil. 1'de gösterilen kuvvet - yerdeğiştirme (force - displacement) fonksiyonuna sahip elasto - plastik bir sistem için bu ilişki

$$F(x) = W_n^2 \left[x - (x - x_y) H(x - x_y) \right] \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada W_n elastik bölgedeki sönümsüz doğal frekans, x_y plastik hale geçiş sırasındaki yerdeğiştirme değerleridir. $H(.)$ ise Heaviside fonksiyonu olarak bilinir ve

$$x < x_y \quad H(x - x_y) = 0$$

$$x \gg x_y \quad H(x - x_y) = 1$$

ile tanımlanır. Denklem (6), Denklem (5) te yerine konularak,

$$P(y_1, y_2) = C \exp \left\{ - A^2 \left[\frac{y_2^2}{W_n^2} + y_1^2 - (y_1 - x_y)^2 H(y_1 - x_y) \right] \right\}$$

elde edilir. Burada, $A^2 = 4 \beta W_n^3 / W_0$ ile tanımlanır ve β kritik sönüm katsayısı oranıdır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-x_y}^{Ax_y} P(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2 = f \quad (8)$$

şartı kullanılarak C katsayısı bulunur ve Denklem (7)'de yerine konulursa, elasto - plastik sistem için geçiş olasılığı Denklem (9) daki gibi yazılabilir (10) :

$$p(y_1, y_2) = \frac{A \exp\left\{-\Delta^2 \left[\frac{y_2^2}{w_n^2} + y_1^2 - (y_1 - x_y)^2 H(y_1 - x_y)\right]\right\}}{w_n \sqrt{\pi} \left\{ \frac{2S_1}{A} + \frac{x_y}{B \exp(B/2)} \left[1 - \exp\{-\beta(\mu-1)\}\right] \right\}} \quad (9)$$

Buradaki $B=2 A^2 x_y^2$, ve (10)

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(Ax_y)^{2n+1}}{(2n+1)(n!)} \quad \dots(11)$$

olup, S_1 serisinin belli bir değere yaklaştığı (convergent) gösterilebilir (10).

2. a — ORTALAMA - KARE YERDEĞİŞTİRME (OKYD) :

Ortalama - Kare Yer Değiştirmenin (OKYD) - (mean - square displacement) önemi, sistemin enerji kapasitesi hakkında bilgi vermesinin yanısıra, mühendislik açısından önemli olan genlik (amplitude) için ortalama değer vermesindedir. Örneğin, sinusoidal bir dalga hareketi için ortalama - değer sıfırdır; fakat ortalama - kare değer sıfırdan farklı olup, bu değer karekökü ortalama genlik (average amplitude) değerini verir. Bu nedenle, olasılık yasasını Denklem (9) da verdiğimiz elasto - plastik sistem için, OKYD, değerlerini elde etmek daha faydalı olacaktır. OKYD için bilinen genel tanım,

$$\Sigma (y_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_1^2 P(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2 \quad (12)$$

denkleminde $p(y_1, y_2)$ için Denklem (9) dan yerine koyup, ilgili işlemleri yaparak,

$$= \frac{\frac{2S_2}{A^3} + \left(\frac{x_y}{B}\right)^3 \left\{ \left[(B+1)^2 + 1 \right] e^{-B/2} - \left[(\mu B+1)^2 + 1 \right] e^{-B(\mu-\frac{1}{2})} \right\}}{\frac{2S_1}{A} + \frac{x_y}{B e^{B/2}} \left[1 - e^{-B(\mu-1)} \right]} \quad (13)$$

bulunur (10). Bu, elasto - plastik sistemin yükleme bölgesi adını ver-

diğimiz $-x_y$ dan μx_y 'a kadar olan bölge için OKYD. değerini veren denklemdir ve burada

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(Ax_y)^{2n+3}}{(2n+3)(n!)} \dots\dots\dots(14)$$

ile ifade edilir.

Ters - yükleme (reverse - loading) denilen μx_y $-x_y$ bölgesi için, OKYD. bazı varsayımlarla (10)

$$E_r(y_1^2) = E_L(y_1^2) + X_b^2 \dots(15)$$

olarak bulunabilir. Burada

$$x_b = x_y \cdot (\mu - 1) \dots\dots\dots(16)$$

2. b - SINIR - AŞMA PROBLEMİ :

Sistem için iki ayrı bölgede OKYD. değerlerini veren eşitlikler elde edilmiş olmakla beraber, tüm sistem için tek OKYD. değeri elde edilmesine gerek vardır. Bu amaçla, sistemin elastik ve plastik bölgelerde geçirdiği zamanların ağırlık faktörü kabulü ile, Zaman - Ağırlıklı OKYD. veya ZAD. (Weighted - mean - square Displacement) hesaplanmıştır. Burada, ayrı bölgelerde geçen zamanların hesaplanabilmesi için elastik - limiti aşma zamanının hesaplanmasına gerek vardır.

« x_y » sınırını, birim zamanda pozitif eğimle aşma sayısına dersek,

$$Y_{x_y}^+ = \int_0^{\infty} y_2 P(x_y, y_2) dy_2 \dots\dots\dots(17)$$

eşitliği yazılabilir (8, 10). $P(x_y, y_2)$ için Denklem (9) dan yerine ko-
yarak,

$$Y_{x_y}^+ = \frac{\sqrt{\pi}}{2S_1 T_n} \exp(-B/2) \dots\dots\dots(18)$$

elde edilir ki, burada $T_n = 2\pi/W_n$ elastik bölgedeki doğal periyottur. Elastik sınır aşma zamanı için ortalama değere $E(t_c)$ diyerek,

$$E(t_c) = 1/Y_{x_y}^+ \dots\dots\dots(19)$$

$$= 2S_1 \exp(B/2) T_n / \sqrt{\pi}$$

yazılır.

2. c — ZAMAN - AĞIRLIKLI ORTALAMA - KARE
YER - DEĞİŞTİRME (ZAD.) :

Yükleme ve ters - yüklemeye bölgeleri için $E(t_c)$ değerlerini eşit kabul ederek; sistemin t süreli bir uyarıcının etkisiyle, yüklemeye bölgesinde geçireceği zaman t_1 ile, ters yüklemeye bölgesinde geçireceği t_r zamanları hesaplanabilir ve de $t_1 + t_r = t$ olur.

t_1 ve t_r 'nin bilinmesi ile ZAD. hesaplamak için

$$\bar{E}(y_1^2) = \frac{t_L E_L(y_1^2) + t_r E_r(y_1^2)}{t} \quad (20)$$

yazılır. $t_1 + t_r = t$ ve Denklem (15), Denklem (20) de yerlerinde konarak ZAD. için

$$\bar{E}(y_1^2) = E_L(y_1^2) + \frac{t_r}{t} x_b^2 \quad (21)$$

elde edilir.

Öte yandan, elasto - plastik sistemi etkileyen uyarıcının tam - elastik sistemi sarsması halinde OKYD. değerini veren eşitlik

$$E(y_1^2) = - \left(W_0 / 64 \pi^3 \right) T_n^3 \quad (22)$$

şeklinde yazılabilir. (6, 10).

3. SONUÇLAR VE TARTIŞMA :

Depreme - benzer bir uyarıcının etkisindeki elasto - plastik bir dereceli sistem için olasılık - yoğunluk fonksiyonu (probability density function) yüklemeye bölgesi için elde edilmiş; zamanı ağırlık faktörü olarak kullanarak, sistemin tüm hareketini kapsayan OKYD. değerini veren formül yazılmıştır.

Uyarıcı için yapılan «sıfır» ortalama değeri kabulü, deprem sırasındaki yer hareketinin ivmesi için gerçekçi bir kabuldür. Sabit spektral yoğunluk varsayımı ise uyarıcının en azından «zayıf - kararlı (weakly stationary)» olmasını gerektirir ki, bunun deprem ivmesi için tam anlamıyla gerçekçi olmadığı bilinmektedir. Fakat, periyodun küçük olduğu hallerde bütün sönüm değerleri için, bu varsayım da yeteri kadar yaklaşık sonuçlar verebilmektedir (13).

OKYD. yi veren formüller pek çok değişkeni bir arada bulundurmaktadır. Bu nedenle, bu değişkenlere sayısal değerler vererek karşılaştırmalı sonuçlara gitmenin daha kolay olacağı düşünülmüş ve bir bilgi - sayar (computer) programı hazırlanmıştır. Sözü edilen sayısal değerler şöyledir :

$$0.005 \leq \xi \leq 0.10 \quad ; \quad 0.10 \leq T_n \leq 10 \quad ; \quad 10 \leq \mu \leq 50$$

$$\tilde{t} = 30 \text{ sn} \quad ; \quad W_0 = 300 (\text{cm/sn})^2 / (\text{devir/sn.})$$

Son iki değer, yaklaşık olarak El - Centro, 1940 depremine ait değerlerdir (14).

S_1 ve S_2 seri ifadelerindeki (Ax_y) sayısı hem A, hem x_y bakımından doğal periyotla ilişkilidirler. A T_n ilişkisi Denklem (7) de verilmiştir.

x_y T_n ilişkisi ise

$$x_y = (C_e \cdot g / 4\pi^2) T_n^2$$

ile tanımlanabilir. Burada C_e deprem katsayısı olarak bilinir. Programda C_e için, Afet Bölgelerinde yapılacak Yapılar Hakkında Yönetmelik (19) tarafından verilen katsayılar şöyle seçilmiştir :

Bölge katsayısı,	$C_o = 0.06$
Zemin katsayısı,	$\alpha = 1.20$
Bina önem katsayısı,	$\theta = 1.50$
Bina dinamik katsayısı,	$\Psi = 1 \quad (T_n \leq 0.5 \text{ sn})$ $= 0.5/T_n \quad (T_n > 0.5 \text{ sn})$
ve Deprem katsayısı	$C_e = C_o \alpha \Psi \theta$

Bu sayısal değerlerle elde edilen sonuçlar grafikler halinde verilmiştir (Şekil. 3, Şekil, 6). Bütün şekillerde görülen, sönüm katsayısının OKYD. değerini azaltıcı etkisi, bilindiği gibi, sönümün enerji yutma özelliği ile ilişkilidir.

Sistem için sertlik süreksizliğini (point of stiffness discontinuity) tanımlayan sınır - yer değiştirme (yield displacement) değeri x_y , aynı zamanda yapının esnekliği (flexibility) için de bir ölçüttür ve bu değer T_n ile doğrusal olarak artar (Denklem - 20). T_n , x_y ve OKYD. arasındaki, Şekil - 3 ve diğerlerinde de izlenebilen, üçlü doğrusal ilişki, Yao ve Yeh'in (18) sonuçlarıyla uyumludur.

Sırasıyla Denklem (21) ve Denklem (22) ile hesaplanan elasto - plastik ve elastik OKYD. değerleri Şekil - 4 de verilmiştir. Elasto plastik ZAD değerlerinin, sünme (ductility) katsayısı ile arttığı ve bu katsayıya bağlı olarak, genellikle elastik değerlerden büyük olduğu Şekil - 4 de görülmektedir. Bu sonucun, deterministik deprem analizi sonuçlarıyla çeliştiği düşünülebilir. Eldeki deprem kayıtlarından hesaplanan deprem tepki spektrumları (earthquake response

spectra), en büyük elasto - plastik tepki değerlerinin, elastik değerlerden daha küçük olduğunu göstermiştir. Bu nedenle aslında bir çelişki yoktur, çünkü tepki - spektrumu en büyük genliği; OKYD., nin karekökü ise ortalama genliği verirler. OKYD.'ne ilişkin bu sonuç, Caughey (5) tarafından saptanan sonuçla da doğrulanmaktadır.

Şekil - 5 de elasto - plastik OKYD. tepki değerlerinin sönüm - sünme duyarlık eğrileri (damping - ductility sensitivity curves) verilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi, elasto - plastik sistem sünmeye daha çok duyarlıdır. Bu, yükleme ve ters - yükleme bölgeleri için sönümün sabit tutulması; buna karşılık, sünmedeki artışın ters yüklemedeki denge noktası x_0 'yi ve buna bağlı olarak ZAD. değerini artırması ile açıklanabilir (Bk. Denklem - 21).

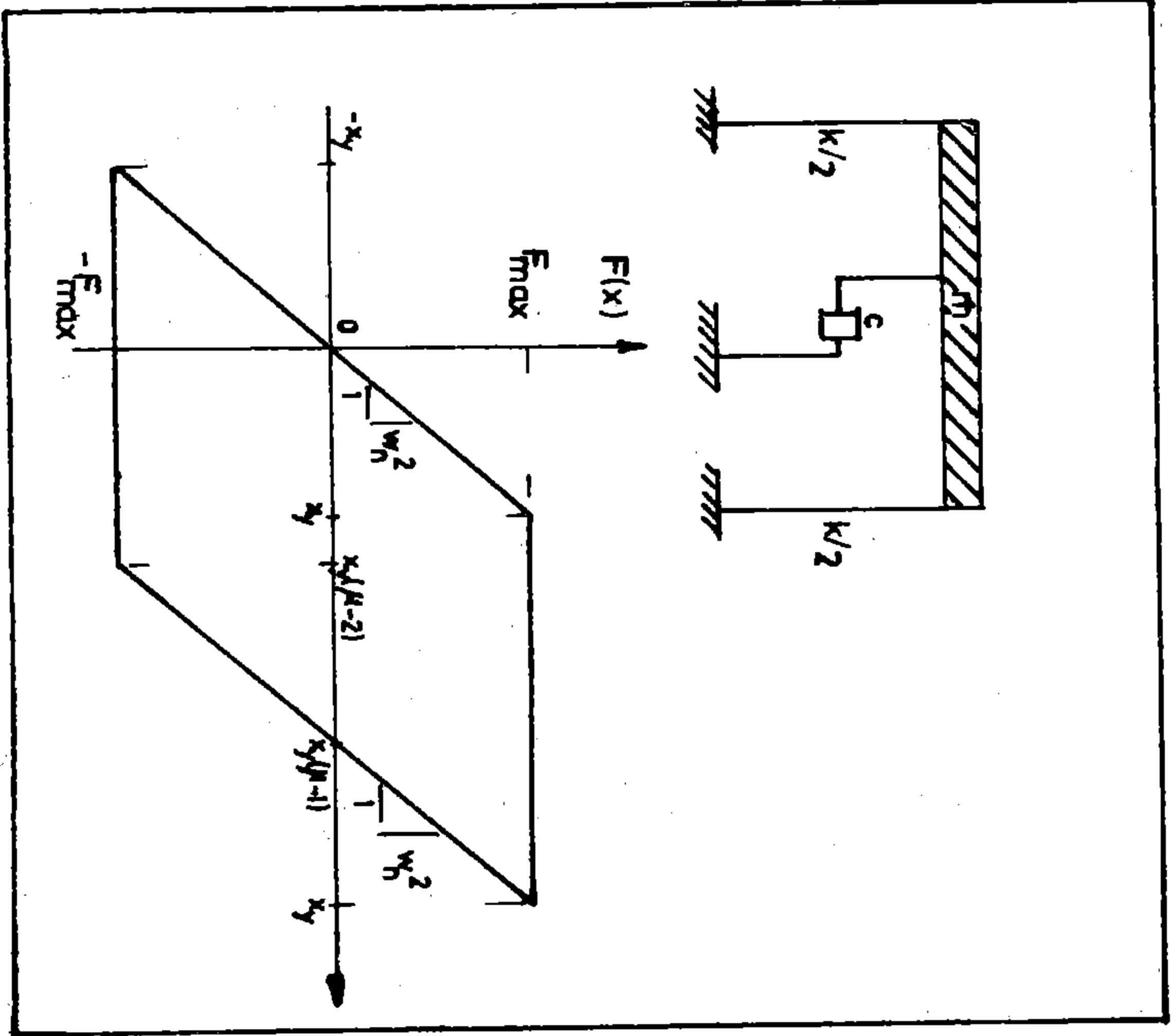
Denklem - 19'da verilen ortalama elastik - sınırı aşma zamanının değişimi Şekil - 6'da gösterilmiştir. Elastik sınır periyotla arttığı için, bilinen bir uyarıcı için, bu sınırın aşılması daha uzun bir zamanı gerektirecektir. Öte yandan, daha büyük sönüm katsayısı sistemin sarsıntı anında daha fazla enerji yutmasını sağlayacak; bu da sınır aşma zamanının artmasına neden olacaktır.

Özetlenecek olursa, depreme - benzer uyarıcıya sarsılan elasto - plastik bir dereceli sistem, elastik sisteme karşın, yer değiştirme için, daha büyük ortalama genlik (mean - amplitude) değerine sahiptir. Bu nedenle elasto - plastik sistemler, dinamik yükleme halinde, en büyük tepki değerlerinin yanısıra, yükün dinamik etkisini de gözönüne alan yöntemlerle incelenmelidir.

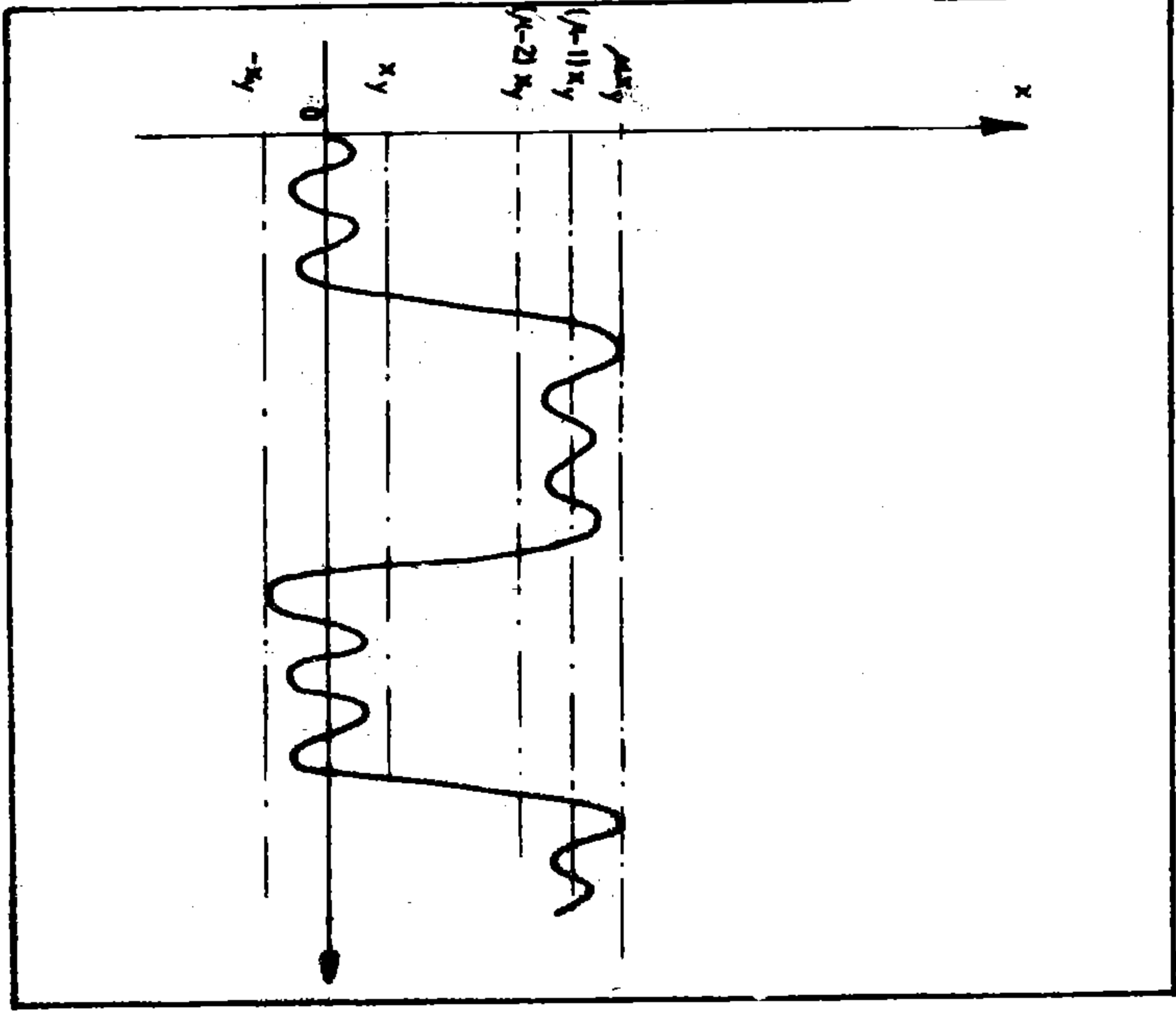
REFERANSLAR :

- 1 — Biggs, J.M., «Introduction to Structural Dynamics,» McGraw - Hill Book Company, New York, 341 p., 1964.
- 2 — Biot, M.A., «A Mechanical Analyser for the Prediction of Earthquake Stress,» Bull. Seism. Soc. Am., v. 31, pp. 151 - 171, 1941.
- 3 — Bogdanoff, J.L., and others, «Response of a Simple Structure to a Random Earthquake - Type Disturbance,» Bull. Seism. Soc. Am., v. 51, pp. 293 - 310, 1961.
- 4 — Bycroft, G.N., «White Noise Representation of Earthquakes,» Proc. ASCE, v. 86, No. EM2, pp. 1 - 16 April 1964.
- 5 — Caughey, T.K., «Random Excitation Of a System with Bilinear Hysteresis,» J. Appl. Mech. v. 27 pp. 649 - 652, 1960.
- 6 — Caughey, T.K. «Derivation and Application of The Fokker - Planck Equation to Discrete Nonlinear Systems Subjected to White Random Excitations.» J. Acoust. Soc. Am., v. 35, pp. 1683 - 1692, 1963.
- 7 — Caughey, T.K., «Equivalent Linearization Techniques,» J. Acoust. Soc. Am., v. 35, pp. 1706 - 1711, 1963.
- 8 — Crandal, S.H., and Mark, W.D., «Random Vibration in Mechanical Systems,» Academic Press, New York, 166 p., 1963.

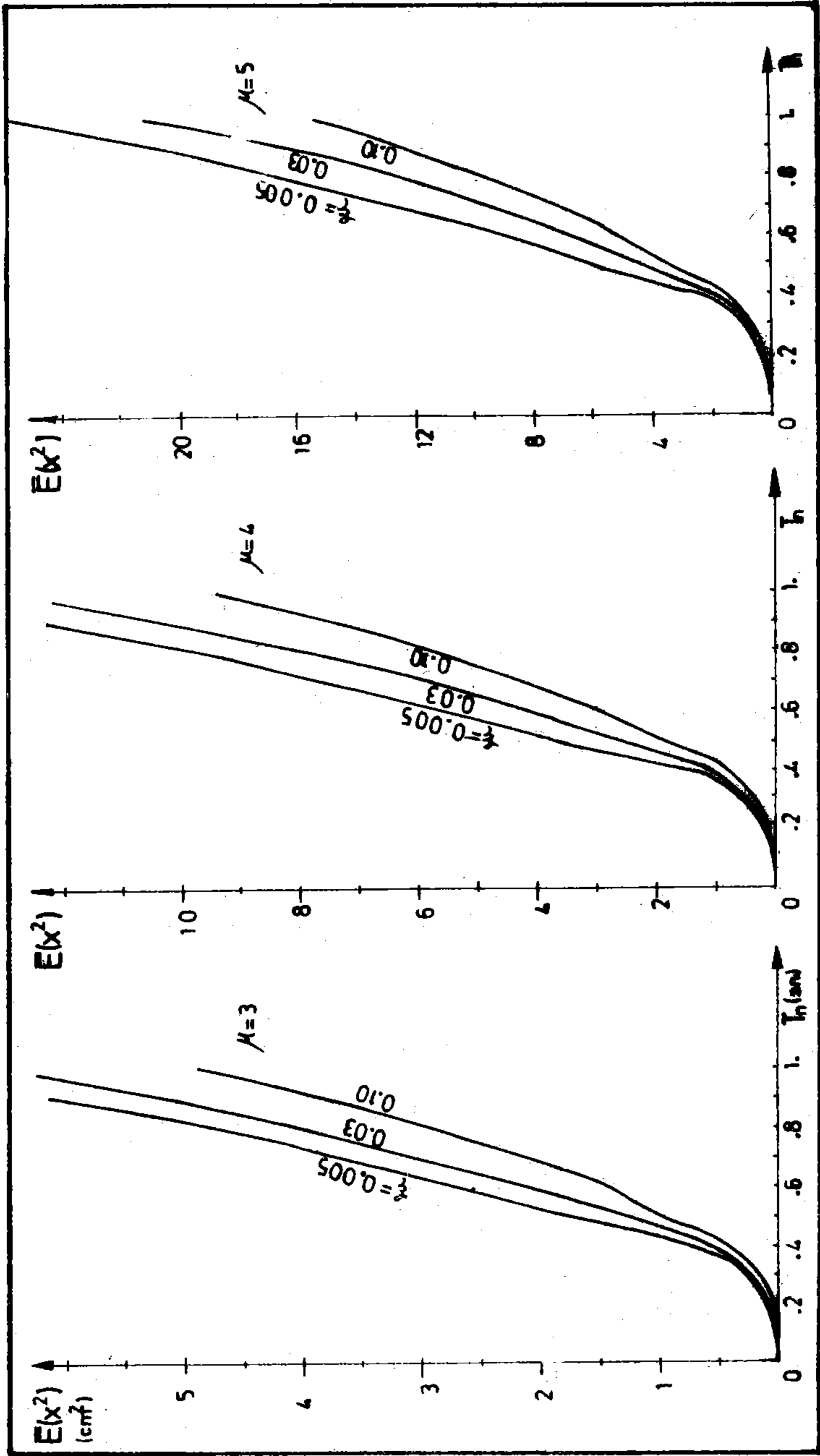
- 9 — Crandall, S.H. «Perturbation Techniques for Random Vibration of Nonlinear Systems.» J. Acoust. Soc. Am. v. 35, pp 1700 - 1705, 1963.
- 10 — Helvacı, İ., «Random Vibration of Elasto - plastic Systems with One Degree of Freedom Subjected to Earthquake Excitation.» Master Thesis, Middle East Technical University., January 1973.
- 11 — Lin, Y.K., «Probabilistic Theory of Structural Dynamics.» McGraw - Hill Book Company, New York, 366 p., 1967.
- 12 — Lutes, L.D., «Equivalent Linearization for Random Vibration.» Proc. ASCE, No. EM3, pp. 227 - 242, June 1970.
- 13 — Penzien, J., «Application of Random Vibration Theory in Earthquake Engineering.» Bull. Int. Inst. of Seism. and Earthq. Eng., v. 2, pp. 47 - 69, 19 1965.
- 14 — Penzien, J., and Liu, S. - C., «Nondeterministic Analysis of Nonlinear Structures Subjected to Earthquake Excitations.» Proc. Fourth World Conf. Earthq. Eng., Santiago, Chile, Paper - A - 1, pp. 114 - 129, 1968.
- 15 — Rosenblueth E., «Probabilistic Design to Resist Earthquakes, Proc. ASCE., v. 90, No. EM5, pp. 189 - 219, Oct. 1964.
- 16 — Rosenblueth. E., and Bustamante, J.I., «Distribution of Structural Response to Earthquakes.» Proc. ASCE., v. 88, No. EM3, pp. 75 - 106, June 1960.
- 17 — Wax, N., ed., «Selected Papers on Noise and Stochastic Processes» Dover Publication, Inc., New York, pp. 113 - 132, 1954.
- 18 — Yeh, H.Y., and Yao, J.T.P., «Random Response of Piecewise Linear System to White Noise Excitation.» Bureau of Engineering Research, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, Technical Report, 39 p., 1969.
- 19 — Afet Bölgelerinde Yapılacak Yapılar Hakkında Yönetmelik, Afet İşleri Genel Müdürlüğü, Ankara, 1968.



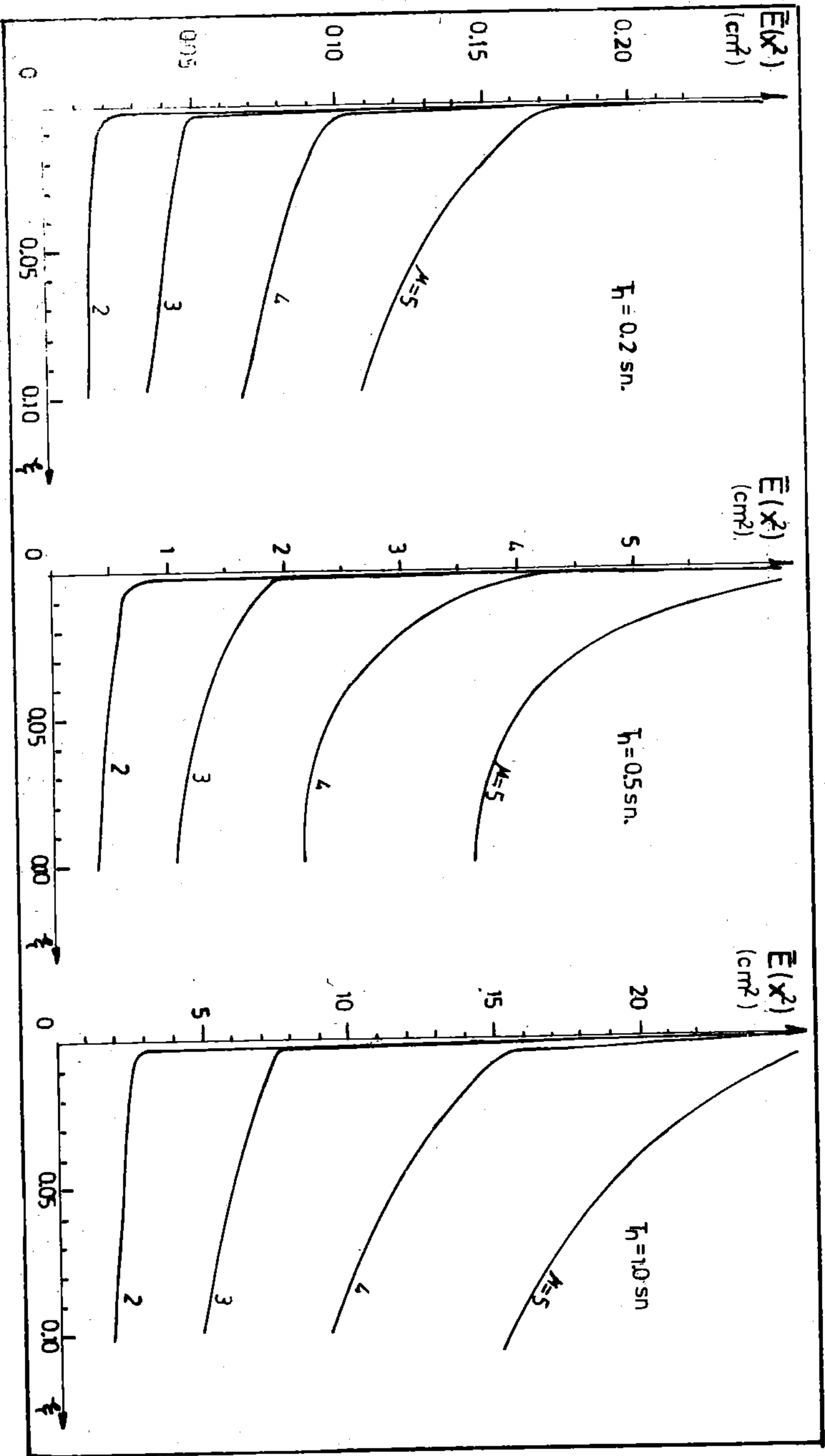
Sekil 1. Bir dereceden serbestlikli sistem ve elastik-plastik kuvvet-yer deđistirme diđramı



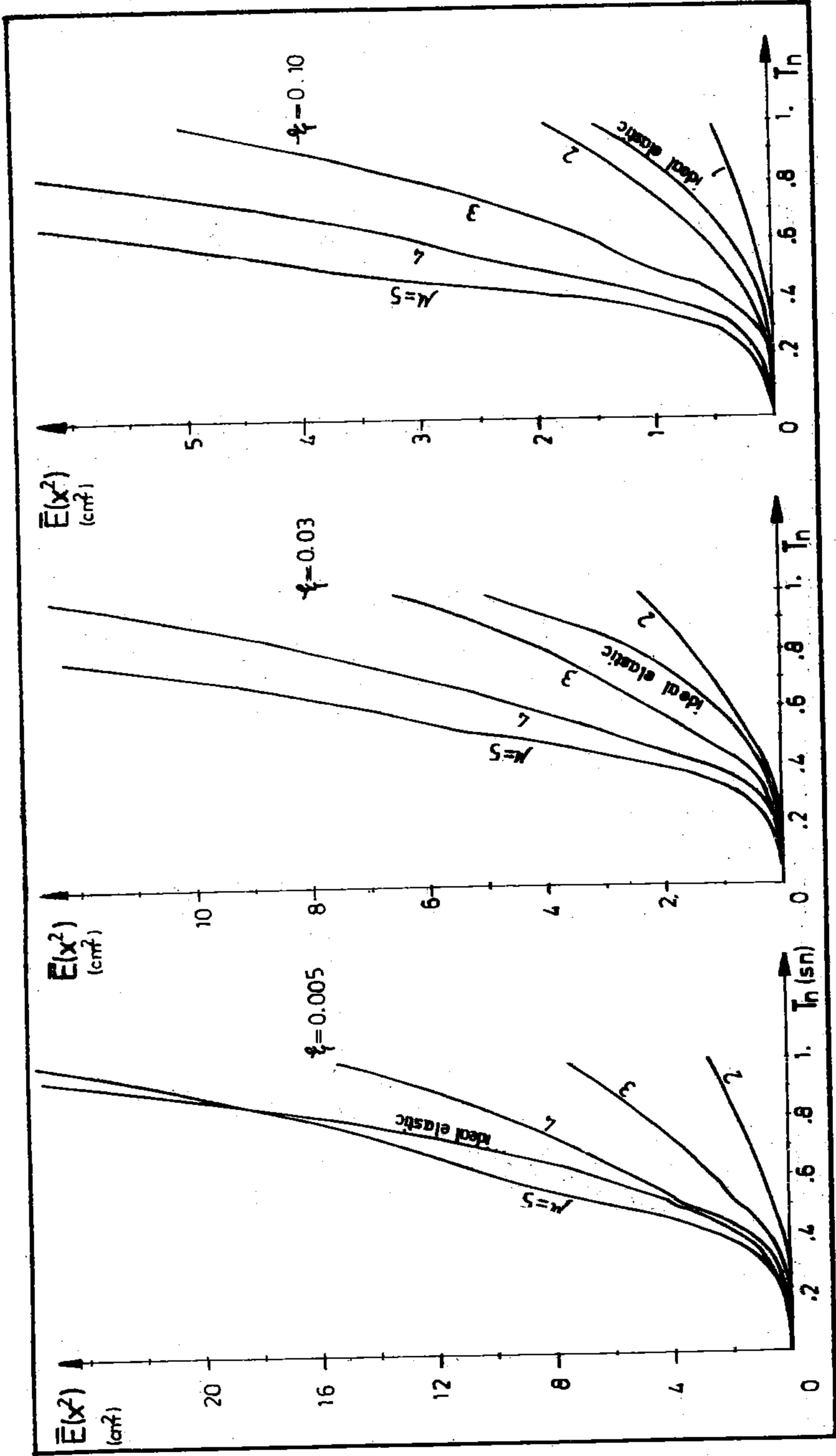
Sekil 2. Kabul edilen yer deđistirme-zaman eđrisi



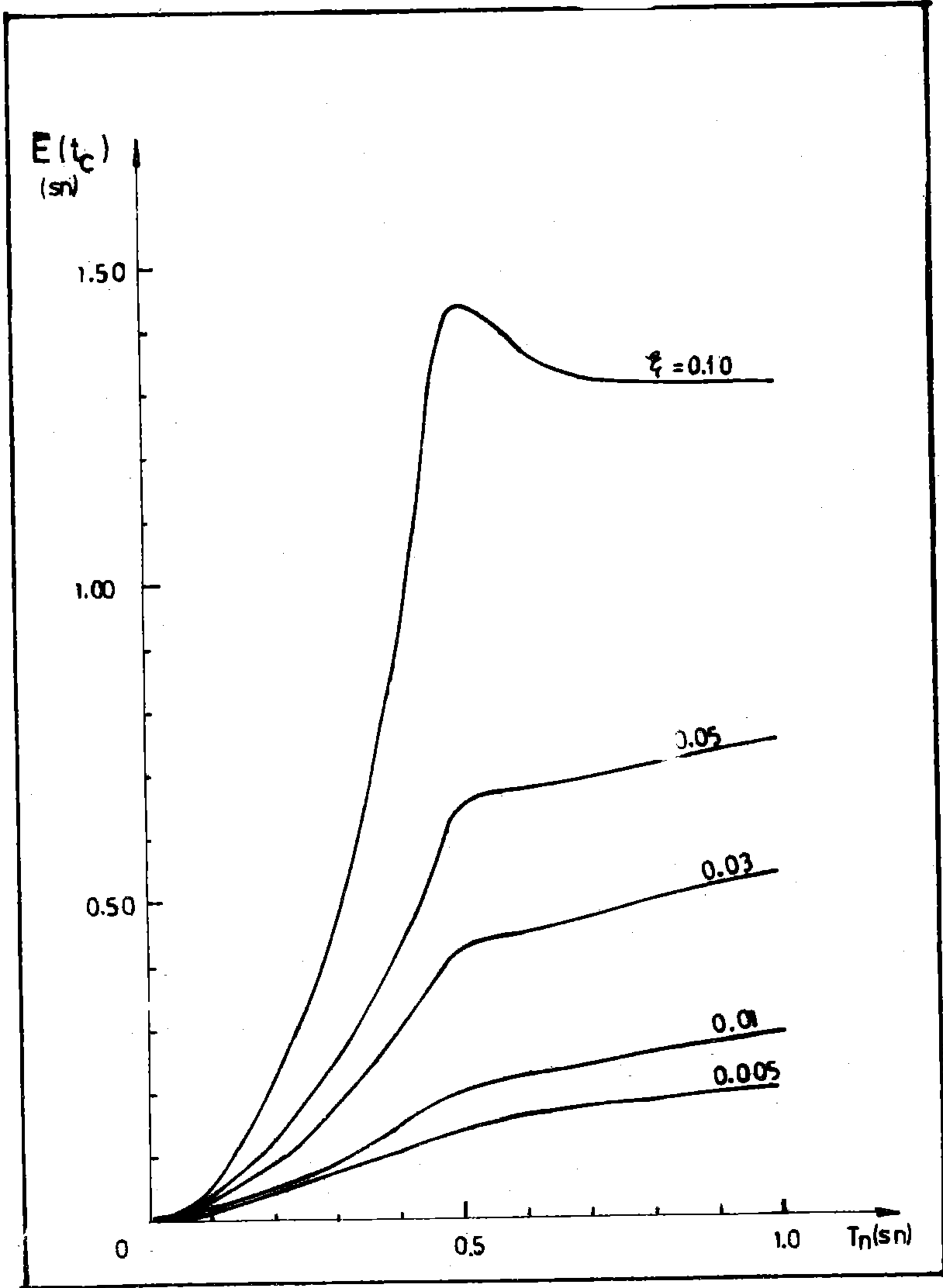
Şekil.3. Zaman-Ağırlıklı OKYD. (ZAD.) Eğrileri



Şekil 5. Sönüm-Sünme Dayarlık Eğrileri



Şekil 4. Elastik ve Elasto-Plastik OKYD. Değerlerinin Karşılaştırılması



Şekil 6. Ortalama Elastik Sınır Aşma Zamanı